

1. Systém řezů M

Nechť $M : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je systém řezů fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, tj. $M = R_A$. Pak M splňuje podmínky:

$$M(0) = X, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta), \quad 0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha < \beta} M(\alpha)$$

1.1. Negace - definice

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha$$

$$\neg \neg \alpha = \alpha$$

1.2. Standartní negace

$$\neg_s \alpha = 1 - \alpha$$

1.3. Rovnovážná hodnota

$$\neg e = e$$

1.4. Vlastnosti negace

Každá fuzzy negace \neg je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky $\neg 1 =$

$0, \neg 0 = 1$. Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\neg^{-1} = \neg$ (neboli \neg je sama k sobě inverzní).

1.5. Generátor fuzzy negace

Nechť $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je rostoucí bijekce. Pak funkce

$$\neg_i = i^{-1} \circ \neg_s \circ i, \quad \text{tj. } \neg_i \alpha = i^{-1}(\neg_s(i(\alpha))) \text{ je fuzzy negace.}$$

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \neg_s \neg \alpha}{2}$$

1. vypočti $i^{-1}()$

2. udělej $1 - i(\alpha)$

3. udělej $i^{-1}(1 - i(\alpha))$

2. Konjunkce (t-norma)

komutativita: $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$

asociativita: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

monotonie: $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge \gamma$

okrajová podmínka: $\alpha \wedge 1 = \alpha$

$$\alpha \wedge_D \beta \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge_S \beta$$

2.1. Standardní

$$\alpha \wedge_S \beta = \min(\alpha, \beta). \text{ Idempotence } (\alpha \wedge_S \alpha = \alpha)$$

2.2. Łukasiewiczova

$$\alpha \wedge_L \beta = \max(\alpha + \beta - 1, 0)$$

2.3. Součinná

$$\alpha \wedge_P \beta = \alpha \cdot \beta.$$

2.4. Drastická

$$\alpha \wedge_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.5. Dělení

- nespojité

Př: Drastická

- spojité

– Nearchimédovské

Př: Standartní

– Archimédovské

$\alpha \wedge \alpha < \alpha$ pro $\alpha \in (0, 1)$

* Nilpotentní

Př: Łukasiewiczova

* Striktní

Př: Součinná

$\beta < \text{gamma}, \alpha \neq 0$

$\alpha \wedge \beta < \alpha \wedge \gamma$

3. Disjunkce

komutativita: $\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha$

asociativita: $\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma$

monotonie: $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma$

okrajová podmínka: $\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha$

$$\alpha \dot{\vee}_D \beta \geq \alpha \dot{\vee} \beta \geq \alpha \dot{\vee}_S \beta$$

3.1. Standardní

$$\alpha \dot{\vee}_S \beta = \max(\alpha, \beta).$$

3.2. Łukasiewiczova

$$\alpha \dot{\vee}_L \beta = \min(\alpha + \beta, 1)$$

3.3. Součinná

$$\alpha \dot{\vee}_P \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

3.4. Drastická

$$\alpha \dot{\vee}_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3.5. Dělení

- nespojité

Př: Drastická

- spojité

– Nearchimédovské

Př: Standartní

– Archimédovské

$\alpha \dot{\vee} \alpha > \alpha$ pro $\alpha \in (0, 1)$

* Nilpotentní

Př: Łukasiewiczova

* Striktní

Př: Součinná

$\beta < \text{gamma}, \alpha \neq 0$

$\alpha \dot{\vee} \beta < \alpha \dot{\vee} \gamma$

4. Množinové operace

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{\vee} \mu_B(x)$$

5. Relace

je fuzzy podmnožina kartézského součinu $X \times Y$, tedy $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Odpovídá jí funkce příslušnosti $\mu_R : X \times Y \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$. Inverzní relace k R je $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ taková, že $\forall x \in X \forall y \in Y : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$.

5.1. reflexivita (hlavní diag. jedničky)

$$\forall x \in X : (x, x) \in R, \text{ tj. } E \subseteq R$$

5.2. symetrie (symetrie dle hlav. diag)

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \text{ tj. } R = R^{-1}$$

5.3. antisymetrie

$$((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R) \Rightarrow x = y, \text{ tj. } R \cap R^{-1} \subseteq E \quad \mu_R(r, s) \wedge \mu_R(s, r) = 0$$

5.4. tranzitivita

$$((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R, \text{ tj. } R \circ R \subseteq R \quad \mu_R(x, z) \wedge \mu_R(y, z) \leq \mu_R(x, z)$$

5.5. částečné uspořádání

relace antisymetrická, reflexivní a tranzitivní,

5.6. ekvivalence

relace symetrická, reflexivní a tranzitivní.