

## 1. Charakteristická funkce v teorii pravděpodobnosti

Funkce  $\Psi(t) = Ee^{itX}$  se nazývá charakteristickou funkcí náhodné veličiny  $X$ . V diskrétním případě tady dostáváme  $\Psi(t) = \sum_j (e^{itx_j} P[X = x_j])$ .

## 2. Náhodná veličina

Náhodná veličina je funkce, která každému prvku množiny  $A$  přiřazuje reálné číslo. Značíme ji  $X$ . Tedy  $X: A \rightarrow \mathbb{R}$

## 3. Nestranný odhad

Řekneme že odhad je **nestranný**, jestliže střední hodnota jeho výběrového rozdělení je rovna hledanému parametru. Označme  $\theta$  neznámý parametr a  $\hat{\theta}$  jeho odhad. Potom je  $\hat{\theta}$  nestranným odhadem  $\theta$ , pokud  $E\hat{\theta} = \theta$ . Například  $\bar{X}$  je nestranným odhadem střední hodnoty a v případě normálního rozdělení je statistika  $S^2$  nestranným odhadem rozptylu  $\sigma^2$ . Nestranný odhad, jehož rozptyl je nejmenší mezi všemi nestrannými odhady příslušného parametru, se nazývá **nejlepší nestranný odhad**. Aby byl odhad konzistentní, musí jeho rozptyl a vychýlení s rostoucím počtem pozorování klesat k nule.

### 3.1. Asymptotický nestranný odhad

$$\forall \vec{\theta} \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[T_n(\vec{X})] = \tau(\vec{\theta})$$

### 3.2. Konzistentní odhad

Odhad  $\sigma^2$  se nazývá **konzistentní**, jestliže

- $E\hat{\theta} = \theta$  pro  $n \rightarrow \infty$
- $D\hat{\theta} = 0$  pro  $n \rightarrow \infty$

**Konzistence** znamená, že čím větší bude rozsah výběru  $n$ , tím bude hodnota statistiky blíže ke skutečné hodnotě odhadovaného parametru.

## 4. F-rozdělení

$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+1}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}$$

Parametry:  $m, n$  - přirozená čísla (stupně volnosti)

$$EX = \frac{n}{n-2} \text{ (pron } \geq 3)$$

$$DX = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ (pron } \geq 5)$$

Použití: Testování hypotéz o rozptylu Pokud z populace budeme vybírat nezávisle dva náhodné výběry, spočteme  $S_1^2$  a  $S_2^2$ . Protože jde o odhady stejného parametru  $\sigma^2$  tak  $F = S_1^2/S_2^2$  bude blízký jedné a bude se řídit F-rozdělením.

## 5. Čebyševova nerovnost

Nechť náhodná veličina  $X$  má střední hodnotu  $EX$  a rozptyl  $DX$ . potom pro každé  $\varepsilon > 0$  platí  $P[|X - EX| \geq \varepsilon] \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ .

Slouží k odhadu pravděpodobnosti  $P[|X - EX| \geq \varepsilon]$

Význam: Velké odchylky od střední hodnoty nejsou tak pravděpodobné.

## 6. Metoda momentů

Porovnáváme  $k$  prvních obecných momentů  $m_p$  s hodnotami výběrových obecných momentů  $\hat{m}_p$ . Tím dostaneme  $k$  rovnic o  $k$  proměnných a jejich řešení můžeme považovat za bodové odhady.

$$m_p = \hat{m}_p \\ EY^p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^p)$$

### 6.1. Metoda momentů × metoda maximální věrohodnosti

Metoda momentů je výpočetně jednoduchá a rychlá, dává však jen velmi přibližný odhad. Metoda maximální věrohodnosti dává konzistentní odhady. V případě velkých výběrů nejlepší, nemusí být však nestranné.

## 7. Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Nilpotentní, jestliže je archimedovská a není striktní (např.: *Lukasiewiczova*). Věta (o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí) **A**. Nechť  $i: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je rostoucí bijekce. Pak operace  $\wedge_i: \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ , definovaná vztahem

$$\alpha \wedge_i \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_L i(\beta)),$$

je nilpotentní fuzzy konjunkce.

**B**. Naopak, každá nilpotentní fuzzy konjunkce  $\wedge$  je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci  $i$ , kterou nazýváme *Lukasiewiczův generátor*.

## 8. Striktní fuzzy

$$\alpha \wedge \beta = i^c - 1)(i(\alpha) \wedge i(\beta))$$

$$\alpha \dot{\wedge} \beta = i^c - 1)(i(\alpha) \dot{\wedge} i(\beta))$$

## 9. Standartní a součinná ekvivalence a jejich vztah

Od implikace  $\dot{\rightarrow}$  se odvozuje komutativní operace  $\dot{\leftrightarrow}$ , obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \dot{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \dot{\rightarrow} \beta) \wedge (\beta \dot{\rightarrow} \alpha).$$

$$\alpha \overset{S}{\rightarrow} \beta = \neg_S \alpha \dot{\wedge} \beta$$

$$\alpha \overset{Q}{\rightarrow} \beta = \neg_S \alpha \dot{\wedge} (\alpha \wedge \beta)$$

$$\alpha \overset{R}{\rightarrow} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta\}$$

## 10. Znaménkový test

Test je založen na diferencích párových hodnot. Testujeme nulovou hypotézu, že medián diferencí je roven nule, vůči oboustranné alternativní hypotéze. Základem je počet znamének diferencí určitého typu (kladných nebo záporných), který je menší. Má smysl pro data  $sn_i$ , párových testů má nejmenší sílu testu. Je zjišťován počet kladných a záporných změn v datech. Menší z těchto čísel je srovnáno stabulkovou kritickou hodnotou znaménkového testu a pokud je menší než tato kritická hodnota, zamítáme shodu obou souborů dat. Výpočtu je využito binomiálního rozložení, které je aproximováno na normální rozložení.

## 11. Rozhodnout a zdůvodnit zda platí

- Každý řez fuzzy podmnožiny  $R$  čísel je uzavřená množina?  
 $\alpha$ -řez nemusí být uzavřená množina, může to být otevřená množina.

Například  $R_A(1/2) = (0, 1)$  pro

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Je-li funkce příslušnosti spojitá, pak podle definice řezu (1.1) je každý řez uzavřená množina (vzor uzavřeného obrazu spojitě funkce je uzavřená množina).

- Daná fuzzy negace a konjunkce, lze vždy najít fuzzy disjunkci tak, že platí de Morganovy zákony? Platí vždy.
- Existuje pro každou fuzzy konjunkci multiplikativní generátor? Ano, ale není určen jednoznačně.

## 12. Pro které fuzzy operace platí zákon absorbce

Zákon absorbce platí pro standartní konjunkci, disjunkci ale neplatí pro P,L,D.

## 13. Musí být každé složení sym. relací sym. relace?

Složení symetrických relací nemusí být symetrická relace? záleží na volbě typu skladání (u Lukasewitzovo to byt nemusí)